

# Metalogik 2: ofullständighet och oavgörbarhet

7,5 hp

VT 2014

## Beskrivning

Denna kurs presenterar Gödels klassiska resultat om ofullständighet hos aritmetiska teorier. Lite förenklat säger de för det första att varje motsägelsefri teori som innehåller tillräckligt mycket aritmetik är ofullständig i den meningen att det finns sanna satser som teorin inte kan bevisa, och för det andra att motsägelsefriheten hos teorin inte kan bevisas med metoder som kan formaliseras i teorin själv. Vi går också igenom bevis för oavgörbarhet hos sådana teorier och även hos predikatlogik (Churchs sats)—dvs att det inte finns någon mekanisk metod att avgöra om en predikatlogisk sats är en logisk sanning eller inte—liksom andra närliggande resultat såsom Tarskis sats om odefinierbarhet av sanning. Den filosofiska innebörden av dessa resultat diskuteras.

Detaljerade bevis för allt detta innehåller följande moment: (a) definition av primitivt rekursiva och rekursiva funktioner; (b) definition av beräkningsbarhet med Turingmaskiner och bevis för att de Turingberäkningsbara funktionerna är precis de rekursiva funktionerna; (c) presentation av teorin första ordningens aritmetik, eller Peanos Aritmetik (PA), liksom en svagare variant (Q); (d) Gödelnumrering eller kodning av termer, formler och härledningar i dessa teorier; (e) bevis för att alla rekursiva funktioner och relationer är representerbara i PA (och även i Q); (f) aritmetisering, dvs översättning av metalogiska påståenden om dessa teorier till satser i teorierna själva; (g) en allmän metod för självreferens: konstruktion av satser i dessa teorier som (i en precis mening) handlar om sig själva.

Idéerna i Gödels bevis för ofullständighetsresultaten är enkla och intuitiva, och vi fokuserar på dessa. Men mycket måste vara på plats för att de ska gå att genomföra i detalj. Vi kommer att behandla vart och ett av momenten (a)–(g) ovan, men lämna en del detaljer åt sidan. Ibland resonerar vi så här: om vi kan ge intuitiv beskrivning av en viss effektiv procedur, så drar vi slutsatsen att det finns en rekursiv funktion (eller Turingmaskin) som utför proceduren, utan att exakt specificera funktionen. Detta är en oproblematiserad användning (eftersom det går att specificera funktionen ifråga) av Church-Turings Tes, som säger att de funktioner och relationer som intuitivt är effektivt beräkningsbara är precis de rekursiva funktionerna och relationerna. Statusen hos denna tes diskuteras vi också.

## Förkunskaper

Kursen Logik (15 hp) *eller motsvarande kunskaper*. Kursen Metalogik 1 (eller motsvarande) rekommenderas också men är inte ett absolut krav. Om man till exempel utan problem läst logikmomentet på grundkursen i teoretisk filosofi kan man fortsätta med Metalogik 2. Vad som krävs är god bekantskap med predikatlogikens språk och något härledningssystem för predikatlogik.

## Undervisning

Föreläsningar (8 stycken) måndagar kl 14–16 i institutionens lokal, D734, med start den 24 mars. Övningar (4 stycken) enligt schema.

## Examination

I första hand inlämningsuppgifter som görs under kursens gång.

## Lärare

Dag Westerståhl, föreläsningar (dag.westerstahl -at- philosophy.su.se)  
Eric Johannesson, övningar (eric.johannesson -at- philosophy.su.se)

## Kurslitteratur

Liksom på Metalogik 1 består kurslitteraturen av föreläsninganteckningar av Dag Westerståhl, som är under omarbetning till en bok. Boken blir klar under kursens gång, med (förhoppningsvis) god framförhållning. Den som vill komplettera med andra standardläroböcker som täcker delvis samma material. Här några möjliga förslag på relativt nya böcker (det finns många fler):

- Dirk van Dalen, *Logic and Structure*, Springer, 5th edition, 2013. [Sista kapitlet ger en kompakt framställning av Gödels ofullständighetsatser. Boken förutsätter vana att läsa matematisk text.]
- G. Boolos, J. Burgess och R. Jeffrey, *Computability and Logic*, 5th edition (inte tidigare upplagor!), Cambridge University Press, 2007 och senare. [Här finns (utspritt över olika kapitel) alla detaljer i beviset för ofullständighets- och oavgörbarhetsresultaten, inklusive Turingmaskiner, primitivt rekursiva och rekursiva funktioner, Gödelnumrering, aritmetisering, representerbarhet i teorin  $Q$ , m m.]
- Peter Smith, *An Introduction to Gödel's Theorems*, 2nd edition, Cambridge University Press, 2013. [Hela boken fokuserar på en detaljerad framställning av ofullständighets- och oavgörbarhetsresultaten. För den som vill fylla i detaljer och veta mer (detsamma gäller för Boolos et al.)]